УДК 004.94

В.З. Абдуллина, канд. техн. наук, доцент, Н.О. Ергалиева, магистрант
КазНТУ им. К.И. Сатпаева

МАРКОВСКИЕ ПРОЦЕССЫ КАК ИНСТРУМЕНТ МОДЕЛИРОВАНИЯ РЫНКА ЗЕРНА

Статья посвящена рассмотрению моделирования состояний экономического объекта с помощью Марковских процессов. На основе характеристик Марковских процессов разработан алгоритм моделирования, реализованный в виде программного модуля «Марковские процессы». Представлены результаты эксперимента, в том числе Марковская цепь, когда объектом являлось зернохранилище.

Для современного уровня развития экономических процессов характерно широкое использование компьютерного моделирования. При исследовании сложных экономических систем возникают ситуации, когда невозможно непосредственно получить знание о них или прогнозировать их поведение из-за сложности или отсутствия полной теории. Кроме того одним из важнейших факторов, который должен учитываться в процессе принятия оптимальных решений, является фактор случайности. При учете случайности необходимо, чтобы массовые случайные явления обладали свойством статической устойчивости. Условие статической устойчивости позволяет использовать в процессе принятия решений эффективные математические методы теории случайных процессов, например, теорию *Марковских процессов*.

Рассмотрим основные характеристики Марковских цепей. Марковский случайный дискретный процесс, протекающий в системе S, характеризуется не только дискретным множеством состояний $\{S_0, S_1, S_2, S_3, \dots\}$, в которых система может пребывать случайным образом, но и теми моментами времени, в которые могут происходить ее переходы из состояния в состояние (рис.1). Эти моменты времени могут быть заранее известны или случайны.

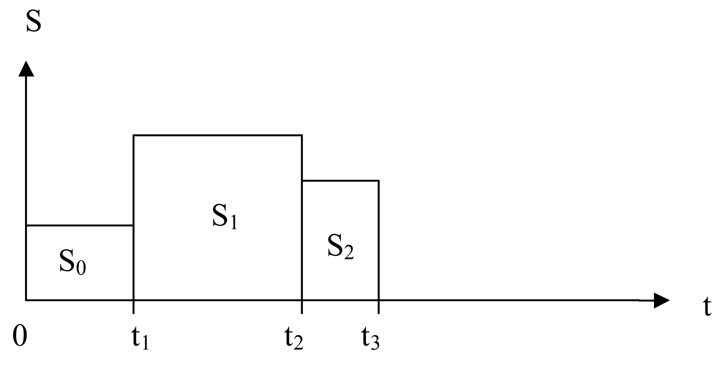

Рисунок 1 - Марковский случайный дискретный процесс

Граф состояний системы (рис.2) представляет собой совокупность вершин, изображающих возможные состояния системы S_i, и совокупность ветвей, изображающих возможные переходы системы из одного состояния в другое.

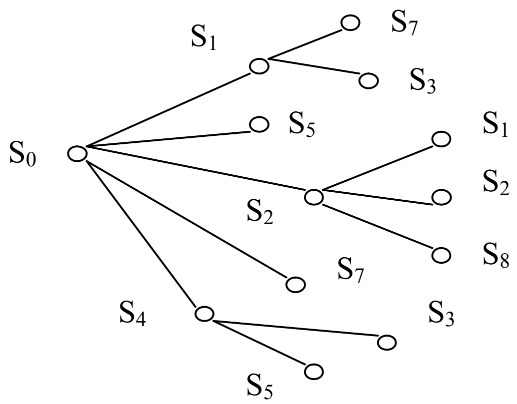

Рисунок 2 - Граф состояний системы

Случайный процесс, протекающий в системе, называется *процессом с дискретным временем*, если переходы системы из одного состояния могут осуществляться только в заранее определенные моменты времени $t_1, t_2, \ldots t_k, \ldots$, называемые *шагами* этого процесса. В промежутках между соседними шагами система сохраняет свои состояния. Не исключается возможность, что на некоторых шагах система не изменит своего состояния.

Случайный процесс с дискретным временем можно представить случайной последовательностью (по индексу *k)* этих событий $S_i(k), i = 1\ldots, n; k = 1,2,\ldots$, которую называют также *цепью*:

$$S_0 \rightarrow S_3 \rightarrow S_1 \rightarrow S_4 \rightarrow \ldots$$

Случайная последовательность называется *Марковской цепью*, если для каждого шага вероятность перехода из любого состояния S_i в любое состояние Sj не зависит от того, когда и как система S оказалась в состоянии S_i.

Так как система S в любой момент t может пребывать только в одном из состояний $S_1,...,S_n$, то при каждом k=1,2,… события $S_1(k),\ldots,S_n(k)$ несовместны и образуют полную группу событий.

Основными характеристиками *Марковских цепей* являются вероятности $p_i(k) = p(S_i(k))(i = 1,...,n; k = 1,2,...)$ событий $S_i(k)$. Эти вероятности $p_i(k)(i = 1,...,n; k = 1,2,...)$ называются вероятностями состояний.

Таким образом, вероятность *i-го* состояния на *k* шаге $p_i(k)$ есть вероятность того, что система *S* от *k* до (*k+1*) шага будет пребывать в состоянии S_i. Сумма вероятностей этих событий (полная группа событий) для каждого $k = 1,2,...$ равна 1:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i(k) = 1, k = 1,2,\ldots . \qquad (1)$$

Если переходные вероятности не зависят от шагов *k*, то Марковская цепь называется *однородной*. Если же хотя бы одна вероятность изменяется с изменением шага *k*, то цепь называется *неоднородной*. Запишем переходные вероятности в виде квадратной матрицы *n*-го порядка, сумма элементов каждой строки равна 1:

$$p = (p_{ij})_{i,j=1}^{n} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix}, \sum_{j=1}^{n} p_{ij} = 1, i = 1,\ldots,n \qquad (2)$$

Вектор-строка вероятностей состояний в начальный момент времени *t=0*, непосредственно предшествующий первому шагу, называется вектором первоначального распределения вероятностей:

$$\left(p_1(0),\ldots,p_n(0)\right) \qquad (3)$$

Для однородной Марковской цепи вектор-строка вероятностей состояний от *k* до (*k+1*) шага равна произведению вектора-строки вероятностей состояний от (*k-1*) до *k* шага на матрицу переходных вероятностей:

$$\left(p_1(k),\ldots,p_n(k)\right) = \left(p_1(k-1),\ldots,p_n(k-1)\right) * P . \qquad (4)$$

Для однородной Марковской цепи вектор-строку вероятностей состояний *k-го* шага можно вычислить на основе вектор-строки вероятностей состояний в начальный момент времени *t=0,* поэтому имеет место следующая формула:

$$\left(p_1(k),\ldots,p_n(k)\right) = \left(p_1(0),\ldots,p_n(0)\right) * P^k , k = 1,2,\ldots \qquad (5)$$

Дискретный случайный процесс с дискретным временем, протекающий в системе, характеризуется тем, что система может переходить из одного состояния в другое только в заранее определенные моменты времени, называемые шагами. На основе представленных ранее характеристик Марковских процессов разработан алгоритм моделирования однородной Марковской цепи, включающий следующие шаги.

Шаг 1. Задание исходных данных для моделирования:

- *K* - число экспериментов;
- *n* - число состояний системы;
- вектор-строка вероятностей состояний в начальный момент времени *t=0* (3):
- матрица переходных вероятностей (2):

Шаг 2. Ввод исходных данных и организация их хранения в базе данных.

Шаг 3. Моделирование базовой случайной величины z по одному из известных алгоритмов.

Шаг 4. Моделирование начального состояния системы с помощью метода моделирования полной группы событий (1), пользуясь таблицей вероятностей:

Ошибка!

$$\begin{bmatrix} S_1 & S_2 & S_n \\ P_1(0) & P_2(0) & P_n(0) \end{bmatrix}$$

и определение исходного состояния S_i .

Шаг 5. Организация цикла по числу экспериментов *К*.

Шаг 6. Моделирование базовой случайной величины z по одному из известных алгоритмов.

Шаг 7. Выбор строки с номером i из матрицы переходных вероятностей (2).

Шаг 8. Моделирование следующего состояния S_j с помощью метода моделирования полной группы событий (1), пользуясь таблицей вероятностей:

Ошибка!

$$\begin{bmatrix} S_1 & S_2 & S_n \\ P_{i1} & P_{i2} & P_{in} \end{bmatrix}$$

Шаг 9. Формирование однородной Марковской цепи:

$$\mathrm{S_i} \rightarrow \mathrm{S_j}$$

Шаг 10. Сохранение в базе данных результатов эксперимента на очередном шаге.

Шаг 11. Повторение шагов 5 – 10 , пока не будет закончен цикл по числу экспериментов.

Шаг 12. Выдача однородной Марковской цепи в виде последовательности состояний:

$$S_i^0 \rightarrow S_j^1 \rightarrow S_i^2 \rightarrow \ldots$$

Шаг 13. Подготовка и печать результатов в удобном для пользователя виде с расшифровкой состояний системы *S*.

Разработанный алгоритм моделирования можно применять для широкого класса систем, функционирование которых представимо как процесс перехода из одного состояния в другое под воздействием каких-либо причин. Например, процесс функционирования экономического объекта характеризуется тем, что в каждый момент времени те или иные блоки заняты выполнением определенных операций. Процесс выполнения этих операций можно рассматривать как процесс перехода экономического объекта из одного состояния в другое.

Для исследования поведения экономических объектов спроектирован модуль «Марковские процессы», разработанный в среде Borland Delphi 7. При моделировании Марковских процессов необходимо выбрать объект исследования, состояния которого и будут являться результатом прогноза. В качестве такого объекта выбран процесс сохранения урожая зернопродуктов Республики Казахстан.

Хранение зерна является важным технологическим процессом, от которого зависит сохранность потребительских свойств товара на достаточно длительном промежутке времени. Сложность организации хранения больших масс зерна связана с созданием необходимых условий для обеспечения сохранности физиологических и физико-химических свойств зерна.

Необходимыми условиями потребления услуги по хранению зерна является наличие места хранения - зернохранилищ и создание условий для сохранности количества и качества размещенного в них зерна (обеспеченность услугами обработки). В качестве таких зернохранилищ для зерна в сельском хозяйстве используются элеваторы.

В процессе хранения выполняются работы не только по сушке и подработке зерна, но и услуги по погрузке и разгрузке зерна, лабораторным исследованиям, документальному оформлению прав собственности на хранящееся зерно третьим лицам, по отпуску зерна автомобильным или железнодорожным транспортом.

Для моделирования определены следующие состояния зернохранилища:

S1 – зернохранилище готово к работе, запасы максимальны;

S2 – зернохранилище готово к работе, объем запасов критический, требуется пополнение запасов;

S3 – зернохранилище готово к работе, объем запасов критический, не требуется пополнение запасов;

S4 – зернохранилище готово к работе, объем запасов равен текущему объему, требуется в ближайшее время пополнить уровень запасов;

S5 – на зернохранилище профилактический ремонт емкостей;

S6 – списание старых емкостей и закуп новых, зернохранилище временно не работает;

S7 – зернохранилище закрыто для работы.

Разработка структуры базы данных для хранения необходимой информации по моделированию выполнена в среде СУБД Microsoft Access. База данных modMP.mdb содержит 3 таблицы: в таблице 1 представлены параметры моделирования Марковских процессов (номер эксперимента, число состояний процесса, число реализаций, длина Марковской цепи); в таблице 2 представлены рабочие переменные, формируемые в ходе моделирования (номер эксперимента, порядковый номер строки матрицы, вероятность); в таблице 3 представлены значения численного эксперимента (номер эксперимента, порядковый номер смоделированного значения, смоделированное значение, наступившее событие).

Состояния зернохранилища моделируются с помощью однородной Марковской цепи с дискретным временем. Главной проблемой при моделировании является правильное задание вектор-строки вероятностей состояний в начальный момент времени и матрицы переходных вероятностей. На рисунке 3 представлены результаты эксперимента при длине Марковской цепи n=20 и числе состояний, равном шести – S1, S2, S3, S4, S5, S6. В окне вывода в 1-ом столбце указан номер эксперимента, во 2-ом – смоделированное значение базовой случайной величины, в 3-ем – смоделированное состояние объекта. В окне «Марковская цепь» представлен результат в виде сформированной цепи состояний объекта.

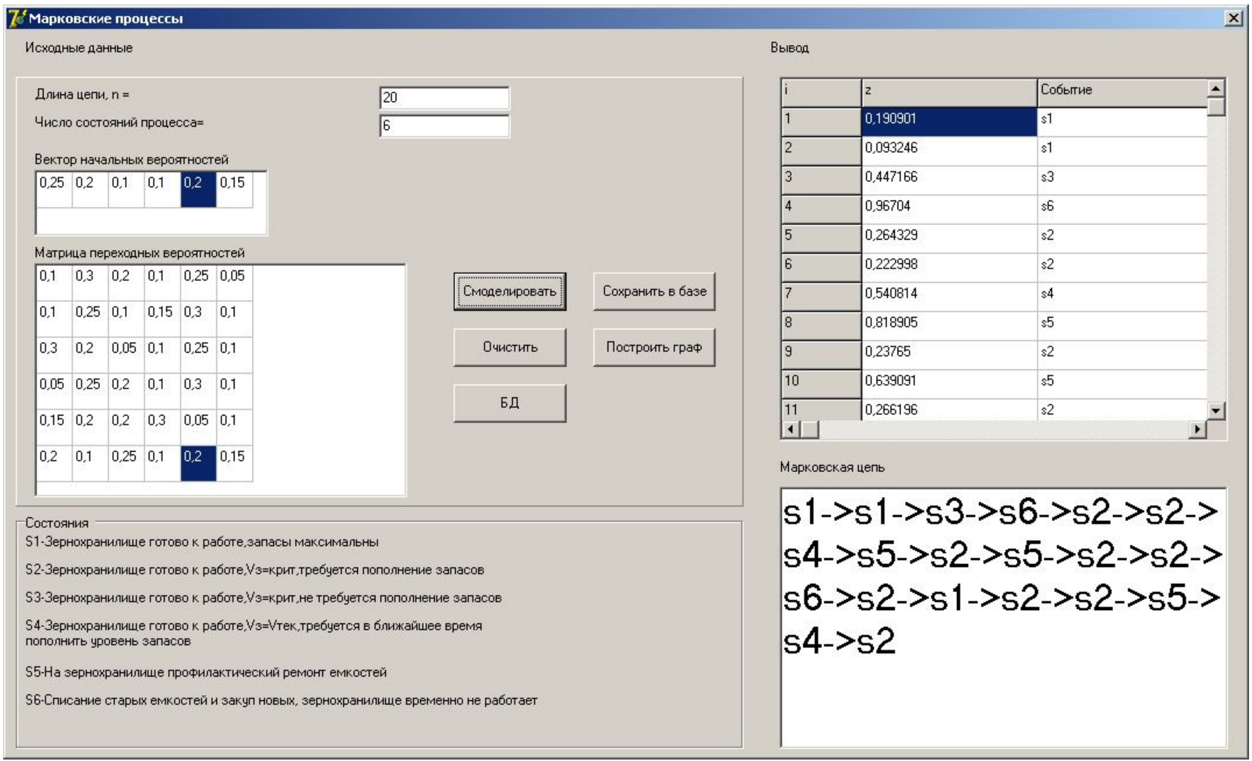

Рисунок 3 – Результаты эксперимента

Аналогичные эксперименты по рынку зерна в целом на основе Марковских процессов позволят прогнозировать состояния всех компонентов рынка зерна.

ЛИТЕРАТУРА

1. Абдуллина В.З., Ергалиева Н.О. К вопросу компьютерного моделирования экономических систем — Алматы: Вестник КазНТУ, 6, 2010 (в печати)