РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГНОЗИРОВАНИЯ СТАЦИОНАРНЫХ ПРОЦЕССОВ

Шакенов К.К., Шакенова Р.К.
e-mail: shakenov2000@mail.ru

Казахский национальный университет имени аль-Фараби, Казахстан

Аннотация. *В работе рассматриваются общая задача прогнозирования, стационарные временные ряды, спектральные функции стационарных процессов, оценки спектральных функций, задачи линейного программирования стационарных процессов. Оценивается спектральная плотность стационарного процесса при неизвестном математическом ожидании.*

Общая задача прогноза.

1. Прогнозирование. Предположим, что стационарный в широком смысле процесс $\{x(t),\ t \in T\}$ наблюдается в моменты времени $t \in T_0$, где $T_0 = \{t \in T:\ t \le t_0\}$ либо $T_0 = \{t \in T:\ t_0 - h \le t \le t_0\}$, $h > 0$. Требуется на основе этих наблюдений дать наилучший среднеквадратичный прогноз этого процесса в некоторый будущий момент $t^* = t_0 + \tau$ $(\tau > 0)$, то есть требуется найти такой функционал $y(t^*) = g_{t^*}(x(t),\ t \in T_0)$ от значений процесса $x(t)$ в моменты $t \in T_0$, чтобы

$$\mathbf{E}\left\| x(t^*) - y(t^*) \right\|^2 \le \mathbf{E}\left\| x(t^*) - y_1(t^*) \right\|^2, \tag{1}$$

где $y_1(t^*)$ – любой другой функционал от значений процесса $x(t)$ в моменты $t \in T_0$.

2. Линейное прогнозирование.

Пусть функционал $y(t^*)$ ищется в классе линейных функционалов от значений процесса $\{x(t),\ t \in T\}$ в моменты времени $t \in T_0$, то есть

$$y(t^*) = \sum_{s \in T_0} C(s)x(s) \quad \text{(дискретное время)} \tag{2}$$

либо

$$y(t^*) = \int_{T_0} C(s)x(s)ds \quad \text{(непрерывное время).} \tag{3}$$

В случае непрерывного времени даже для сравнительно простых классов процессов функция $C(s)$ в (3) оказывается обобщенной.

Задача линейного прогнозирования допускает простую геометрическую интерпретацию. Пусть $\mathbf{H}_x$ – пространство значений процесса $\{x(t),\ t \in T\}$ и $\mathbf{H}_x(T_0)$ – замкнутое подпространство в $\mathbf{H}_x$, являющееся замыканием в $\mathbf{H}_x$ линейной оболочки случайных величин (векторов) $x(t_i)$ $(t_i \in T_0,\ i = 1, \ldots, N)$. Задача линейного прогнозирования состоит в нахождении величин $\hat{y}(t^*)$, являющихся проекциями неизвестных значений $x(t^*)$ как элементов из $\mathbf{H}_x$ на подпространство $\mathbf{H}_x(T_0)$.

3. Стационарные временные ряды.

Пусть случайный процесс определяется как семейство случайных величин $\{x(t),\ t\in T\}$, что для каждого набора $t_1,\dots,t_n$ значений $t\in T$ имеется совместная функция распределения случайных величин $x(t_1),\dots,x(t_n)$.

Будем представлять себе переменную t временем, T считать подмножеством вещественной оси. Так, в некоторых случаях T может состоять из точек арифметической прогрессии. В этих случаях можно выбрать единицу времени таким образом, чтобы $T=\dots,-1,\ 0,\ +1,\dots$. Эти выборки образованы значениями $x(t)$ в моменты $1,\dots,n$ как $n-h,\ n-h+1,\dots,\ n-1$. Для нашей задачи произвольный случайный процесс $\{x(t),\ t\in T\}$ оказывается слишком общим объектом, чтобы его можно было достаточно хорошо изучать. Мы ограничимся стационарными процессами или стационарными временными рядами. Имеется два важных, для нашей задачи, типа таких процессов.

Стационарный в узком смысле процесс определяется тем свойством, что случайная величина

$$\left(x(t_1),\dots,x(t_n)\right) \tag{4}$$

при любых $t_1,\dots,t_n$ и произвольном h распределена одинаково с величиной

$$\left(x(t_1+h),\dots,x(t_n+h)\right). \tag{5}$$

Следовательно, распределение величины (4) зависит только от разностей

$$t_2-t_1,\ t_3-t_2,\ \dots\ ,\ t_n-t_{n-1}. \tag{6}$$

Справедливо

Утверждение 1. *Если* $\{x(t),\ t\in T\}$ *– стационарный в узком смысле процесс и* $\mathbf{E}\left(\left|x(t)\right|\right)<\infty$, *то* $\mathbf{E}\left(x(t)\right)=\mathrm{const}$ *при всех* t.

Некоторые из наиболее полезных результатов о временных рядах верны без предположения о стационарности процесса в узком смысле при следующих более слабых условиях: 1) $\mathbf{E}\left(x(t)\right)=0$; 2) матрица ковариаций величин (5) не зависит от h. Процессы $\{x(t),\ t\in T\}$ удовлетворяющие эти двум условиям, называются **стационарными в широком смысле**. Это означает, что матрица ковариаций зависит только от разностей (6) и, следовательно, ковариация $x(t+h)$ и $x(t)$ (считать $\mathbf{E}\left(x(t)\right)=0$) оказывается функцией только h:

$$\mathbf{E}\left(x(t+h)\ x(t)\right)=\gamma(h). \tag{7}$$

Рассматриваемая как функция h, $\gamma(h)$ называется **функцией ковариаций** процесса $\{x(t),\ t\in T\}$; иногда её называют **ковариацией с запаздыванием аргумента** или **автоковариацией** с запаздыванием. Коэффициент корреляции между $x(t+h)$ и $x(t)$ равен $\rho(h)=\gamma(h)/\gamma(0)$. Рассматриваемый как функция h, $\rho(h)$ называется **сериальным коэффициентом корреляции процесса**. Справедливо

Утверждение 2. *Стационарный в узком смысле процесс с конечной матрицей ковариаций стационарен также в широком смысле.*

4. Спектральная функция стационарного процесса.

4.1. Частный случай. Если рассматривать только два первых момента стационарного процесса, то для описания процесса достаточно функции ковариаций $\gamma(h)$. Покажем, что сама функция ковариаций может быть выражена через спектральную функцию процесса. Рассмотрим сначала связь между функцией ковариаций и спектральной функцией для стационарного (вещественного) процесса:

$$x(t)=\sum_{p=1}^{r}a_p\cos\left(t\omega_p+u_p\right),\ \ t=\ldots,\ -1,\ 0,\ +1,\ldots, \tag{8}$$

где $a_1,\ \ldots,\ a_r$ – вещественные постоянные, $\omega_1,\ \ldots,\ \omega_r$ – числа из интервала $\left[-\pi,\ +\pi\right]$, которые можно считать упорядоченными: $\omega_1<\ldots<\omega_r$, $u_1,\ \ldots,\ u_r$ – независимые случайные величины, каждая из которых равномерно распределена на $\left[-\pi,\ +\pi\right]$. Легко доказать, что совместное распределение величин $\left(x(t_1),\ldots,x(t_n)\right)$ такое же, как $\left(x(t_1+h),\ldots,x(t_n+h)\right)$, то есть процесс (8) стационарен в узком смысле. Также легко проверяется, что при всех t для процесса (8)

$$\mathbf{E}x(t)=\sum_{p=1}^{r}a_p\mathbf{E}\left(\cos\left(t\omega_p+u_p\right)\right). \tag{9}$$

Для функции ковариаций $\gamma(h)=\mathbf{E}\left(x(t+h)\ x(t)\right)$ имеем

$$\gamma(t-s)=\sum_{p,\ q=1}^{r}a_pa_q\mathbf{E}\left(\cos\left(s\omega_p+u_p\right)\ \cos\left(t\omega_q+u_q\right)\right). \tag{10}$$

Но $\mathbf{E}\left(\cos\left(s\omega_p+u_p\right)\ \cos\left(t\omega_q+u_q\right)\right)=0,\ q\neq p$. Пользуясь тем, что при $q=p$ $\cos\left(s\omega_p+u_p\right)\cos\left(t\omega_q+u_q\right)=\frac{1}{2}\cos\left((s+t)\omega_p+2u_p\right)+\frac{1}{2}\cos\left((s-t)\omega_p\right)$ находим

$$\mathbf{E}\left(\cos\left(s\omega_p+u_p\right)\ \cos\left(t\omega_p+u_p\right)\right)=\frac{1}{2}\cos\left((s-t)\omega_p\right).$$

Следовательно, полагая $t-s=h$, будем иметь

$$\gamma(h)=\frac{1}{2}\sum_{p=1}^{r}a_p^2\cos\left(h\omega_p\right)=\int_{-\pi}^{+\pi}\cos(h\omega)dF(\omega), \tag{11}$$

где $F(\omega)$ – неубывающая ступенчатая функция на $\left[-\pi,\ +\pi\right]$, определяемая как

$$F(\omega)=\frac{1}{2}\sum_{\omega_p\le\omega}a_p^2. \tag{12}$$

В конечных точках интервала $\left[-\pi,\ +\pi\right]$ $F(-\pi)=0$ и $F(+\pi)=\gamma(0)$. $F(\omega)$ – называется спектральной функцией, отвечающей функции ковариаций $\gamma(h)$ из (11). Выражение $\gamma(h)=\int_{-\pi}^{+\pi}\cos(h\omega)dF(\omega)$ называется также **спектральным представлением** $\gamma(h)$.

4.2. Общий случай. Пусть теперь

$$x(t),\ t=\ldots,\ -1,\ 0,\ +1,\ \ldots \tag{13}$$

произвольный вещественный стационарный процесс с $\mathbf{E}\left(x(t)\right)=0$ и функцией ковариаций $\gamma(h)$. Для такого процесса $\gamma(-h)=\gamma(h)$. Теперь для этого случая определим функцию ковариаций $\gamma(h)$. Для любого целого M определим функцию $F_M(\omega)$ на $\left[-\pi,\ +\pi\right]$ следующим образом:

$$F_M(\omega)=\frac{1}{\pi M}\int_{-\pi}^{\omega}\mathbf{E}\left(x(1)\cos(\omega)+\ldots+x(M)\cos(\omega)\right)^2d\omega=$$

$$\frac{1}{\pi M}\int\limits_{-\pi}^{\omega}\sum_{p,\ q=1}^{M}\gamma(p-q)\cos(p\omega)\cos(q\omega)\,d\omega=$$

$$\frac{1}{\pi M}\left\{\sum_{p\neq q=1}^{M}\gamma(p-q)\left[\frac{\sin((p+q)\omega)}{2(p+q)}+\frac{\sin((p-q)\omega)}{2(p-q)}\right]+\right.$$

$$\left.\gamma(0)\sum_{p=1}^{M}\frac{\sin(p\omega)\cos(p\omega)}{2p}+\frac{\gamma(0)M}{2}(\omega+\pi)\right\}. \qquad (14)$$

Функция $F_M(\omega)$ не убывает на $[-\pi,\ +\pi]$, $F_M(-\pi)=0$ и $F_M(+\pi)=\gamma(0)$. При $M\to\infty$ $F_M(\omega)$ сходится к неубывающей функции $F(\omega)$ с $F(-\pi)=0$ и $F(+\pi)=\gamma(0)$.

Так как $\gamma(-h)=\gamma(h)$, достаточно рассматривать только неотрицательные значения h и, легко показать, что при $h=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$

$$\gamma(h)=\int\limits_{-\pi}^{+\pi}\cos(h\omega)\,dF(\omega). \qquad (15)$$

Используя симметричность приращений $F(\omega)$ и функции $\cos(h\omega)$ относительно $\omega=0$, (15) можно записать в виде

$$\gamma(h)=2\int\limits_{0}^{+\pi}\cos(h\omega)\,dF(\omega). \qquad (16)$$

$F(\omega)$ называется **спектральной функцией** стационарного процесса $x(t)$. Если $F(\omega)$ абсолютно непрерывна и $f(\omega)$ – её производная, то $f(\omega)$ называют **спектральной плотностью** процесса. Из полученного результата следует

Утверждение 3. *Если* $x(t)$, $t=\ldots,\ -1,\ 0,\ +1,\ \ldots$ – *вещественный стационарный* процесс с $\mathbf{E}(x(t))=0$, *то функция ковариаций* $\gamma(h)$, $h=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$, *допускает представление (16), где спектральная функция* $F(\omega)=\lim\limits_{M\to\infty}F_M(\omega)$, *а* $F_M(\omega)$ *определена в (14).*

4.3. Белый шум. Если вещественный стационарный процесс $x(t)$, $t=\ldots,-1,0,+1,\ldots$, имеет постоянную спектральную плотность $f(\omega)=\frac{\gamma_0}{2\pi}$, $\omega\in[-\pi,\ +\pi]$, то из (15) следует, что $\gamma(h)=0$ при $h\neq 0$. Обратно, пусть $\gamma(h)=0$ при $h\neq 0$; тогда

$$\int\limits_{-\pi}^{+\pi}\cos(h\omega)f(\omega)\,d\omega=\begin{cases}0, & h\neq 0,\\ \gamma(0), & h=0.\end{cases} \qquad (17)$$

Если функция $f(\omega)$ симметрична относительно $\omega=0$ и может быть представлена рядом Фурье $b_0+b_1\cos(\omega)+b_2\cos(2\omega)+\ldots$, то $\int\limits_{-\pi}^{+\pi}\cos(h\omega)\,f(\omega)d\omega=b_h\int\limits_{-\pi}^{+\pi}\cos^2(h\omega)d\omega$ и левая часть обращается в нуль при $h\neq 0$, следовательно, $b_h=0$ для $h\neq 0$. Отсюда

$f(\omega)=b_0$ и из того, что $\int_{-\pi}^{+\pi} f(\omega)d\omega=\gamma(0)$ получаем $b_0=\frac{\gamma(0)}{2\pi}$. Таким образом, на интервале $[-\pi,\ +\pi]$ имеем $f(\omega)=\frac{\gamma(0)}{2\pi}$.

Утверждение 4. *Если вещественный стационарный процесс* $x(t)$, $t=\ldots,\ -1,\ 0,\ +1,\ \ldots$, *имеет симметричную спектральную плотность* $f(\omega)$, *представимую рядом Фурье* $b_0+b_1\cos(\omega)+b_2\cos(2\omega)+\ldots$, *то необходимым и достаточным условием обращения в нуль функции ковариаций* $\gamma(h)$ *при* $h\neq 0$ *является постоянство* $f(\omega)$. *В этом случае* $f(\omega)=\frac{\gamma(0)}{2\pi}$, $\omega\in[-\pi,\ +\pi]$.

5. Оценка спектральной функции. Пусть стационарный процесс $x(t)$, $t=\ldots,-1,0,+1,\ldots$, имеет среднее (математическое ожидание) μ (**известно**) и спектральную плотность $f(\omega)$ (**неизвестна**). **Рассмотрим задачу оценивания** $f(\omega)$ **по выборке** $(x(1),\ldots,x(n))$ **считая** μ **известным.**

Решение. Если вспомнить определение $F(\omega)$ как предела последовательности функций $F_M(\omega)$, определенных в (14), при $M\to\infty$, то в качестве оценки $f(\omega)$ по выборке $(x(1),\ldots,x(n))$ можно брать выражение

$$f_n(\omega)=\frac{1}{n\pi}\big(y(1)\cos(\omega)+y(2)\cos(2\omega)+\ldots+y(n)\cos(n\omega)\big)^2, \tag{18}$$

где $y(t)=x(t)-\mu$. Для него получим

$$\mathbf{E}f_n(\omega)=\frac{1}{2\pi}\left\{\gamma(0)\left[1+\frac{\sin(n\omega)\cos((n+1)\omega)}{n\sin(\omega)}\right]+\right.$$
$$\left.2\sum_{i=1}^{n-1}\gamma(i)\left[\left(1-\frac{i}{n}\right)\cos(h\omega)+\frac{\sin((n-i)\omega)\cos((n+1)\omega)}{n\sin(\omega)}\right]\right\}. \tag{19}$$

Устремляя n к бесконечности и используя ряд Фурье $\frac{1}{2\pi}\left(\gamma(0)+2\gamma(1)\cos(\omega)+2\gamma(2)\cos(2\omega)+\ldots\right)$ функции $f(\omega)$, найдем, что для всех $\omega\in[-\pi,\ +\pi]$, кроме $\omega=0$, $\lim_{n\to\infty}\mathbf{E}f_n(\omega)=f(\omega)$, а $\lim_{n\to\infty}\mathbf{E}f_n(0)=2f(0)$. Таким образом, $f_n(\omega)$ оказывается **асимптотически несмещенной оценкой** $f(\omega)$ для $\omega\in[-\pi,\ +\pi]$, $\omega\neq 0$.

6. Линейное прогнозирование стационарных процессов.

Пусть нам известны значения процесса $\{x(t)\}$ в моменты $t=\ldots,-2,-1,0$, и мы хотим предсказать $x(1)$ с помощью линейной комбинации значений $\ldots,\ x(-2),\ x(-1),\ x(0)$, воспользовавшись методом наименьших квадратов.

Постановка задачи. При каких условиях на процесс среднее значение квадрата ошибки предиктора (прогноза) положительно и при каких условиях оно равно нулю? Ответ на этот вопрос был дан А.Н. Колмогоровым в 1941 году, [1], и, Н. Винером в 1949 году, [2].

Решение. Обозначим через $\bar{x}(1)_n$ предиктор для $x(1)$, построенный по $x(-n)$, ... , $x(-1)$, $x(0)$. Тогда

$$\bar{x}(1)_n = \sum_{i=-n}^{0} \bar{a}_{in} x(i), \tag{20}$$

где коэффициенты $\bar{a}_{in}$, $i = -n,...,-1,0$, минимизируют относительно a_{in} выражение

$$\mathbf{E}\left(x(1) - \sum_{i=-n}^{0} a_{in} x(i) \right)^2 \to \min. \tag{21}$$

Отсюда находим, что

$$\bar{a}_{in} = \sum_{j=-n}^{0} \sigma^{ij} \gamma(j-1), \tag{22}$$

где $\left[\sigma^{ij}\right] = \left[\sigma_{ij}\right]^{-1}$ и $\left[\sigma_{ij}\right]$ – матрица размера $(n+1)\times(n+1)$

$$\begin{bmatrix} \gamma(0) & \gamma(1) & \dots & \gamma(n) \\ \gamma(1) & \gamma(0) & \dots & \gamma(n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \gamma(n) & \gamma(n-1) & \dots & \gamma(0) \end{bmatrix}, \tag{23}$$

образованная числами

$$\gamma(h) = \gamma(-h) = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(h\omega) f(\omega)\, d\omega, \tag{24}$$

где $f(\omega)$ – спектральная плотность и $\gamma(h)$ – функция ковариации. Как и раньше, напомним, что для произвольного вещественного стационарного процесса $x(t)$, $t = ...,-2,-1,0,+1,...$ с $\mathbf{E}(x(t)) = 0$ справедливо $\gamma(-h) = \gamma(h)$, и для $\omega \in [-\pi, +\pi]$

$$\gamma(h) = 2\int_{0}^{\pi} \cos(h\omega) dF(\omega). \tag{25}$$

$F(\omega)$ называется спектральной функцией стационарного процесса $x(t)$. Если $F(\omega)$ абсолютно непрерывна и $F'(\omega) = f(\omega)$, то $f(\omega)$ называют спектральной плотностью процесса.

1) *Пусть теперь* $x(t)$, $t = ...,-1,0,+1,...$ *– стационарный процесс, спектральная плотность которого равна* $f(\omega) = \frac{1}{\pi^2}(\pi - |\omega|)$, $-\pi \le \omega \le +\pi$. *Тогда функция ковариаций имеет вид*

2)
$$\gamma(h) = \begin{cases} 1, & h = 0, \\ \left(\dfrac{2}{\pi h}\right)^2, & \text{если } h \text{ нечетно}, \\ 0, & \text{если } h \text{ четно}. \end{cases}$$

Решение. Оценим $f(\omega)$ по выборке $(x(1),...,x(n))$. Она имеет вид (18), то есть

$$f_n(\omega) = \frac{1}{n\pi}\big(y(1)\cos(\omega) + y(2)\cos(2\omega) + ... + y(n)\cos(n\omega)\big)^2,$$

где $y(t) = x(t) - \mu$. (Здесь считается μ известно.)

Как и раньше, эта оценка $f_n(\omega)$ является **асимптотически несмещенной оценкой** $f(\omega)$ для $\omega \in [-\pi, +\pi]$, $\omega \neq 0$.

Далее, по выборке $(x(1),...,x(n))$ оценим среднее (математическое ожидание) μ, то есть $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x(i)$. Затем, определяем $y(t) = x(t) - \bar{x}$. И по формуле (18) определим $f_n(\omega)$. Заменяем $f(\omega)$ на $f_n(\omega)$ и вычислим по формуле (24):

$$\gamma(h) = \gamma(-h) = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(h\omega) f_n(\omega)\, d\omega .$$

Далее, по формуле (22) находим

$$\bar{a}_{in} = \sum_{j=-n}^{0} \sigma^{ij} \gamma(j-1),$$

затем по формуле (20) построим предиктор (прогноз), то есть

$$\bar{x}(1)_n = \sum_{i=-n}^{0} \bar{a}_{in} x(i) .$$

Задача прогнозирование является стохастической задачей. [3], [4].

7. Практическое применение.
Стоимость нефти сорта Brent (долларов за баррель) за 10 месяцев 2016 года

January	February	March	April	May	June	July	August	September	October
34.73	35.97	38.66	48.14	49.67	49.72	42.49	47.04	49.05	52.47

Линейное прогнозирование стационарных процессов. Составим выборку $x(-n)$, ... , $x(-1)$, $x(0)$: $x(-9) = 34.73$, $x(-8) = 35.97$, $x(-7) = 38.66$, $x(-6) = 48.14$, $x(-5) = 49.67$, $x(-4) = 49.72$, $x(-3) = 42.49$, $x(-2) = 47.04$, $x(-1) = 49.05$, $x(0) = 52.47$ или в новых обозначениях $x(1) = 34.73$, $x(2) = 35.97$, $x(3) = 38.66$, $x(4) = 48.14$, $x(5) = 49.67$, $x(6) = 49.72$, $x(7) = 42.49$, $x(8) = 47.04$, $x(9) = 49.05$, $x(10) = 52.47$.

Рассмотрим стационарный процесс $x(t)$, $t = ..., -1, 0, +1, ...$ спектральная плотность которого равна $f(\omega) = \frac{1}{\pi^2}(\pi - |\omega|)$, $-\pi \le \omega \le +\pi$. Тогда функция ковариаций имеет вид

$$\gamma(h) = \begin{cases} 1, & h = 0, \\ \left(\dfrac{2}{\pi h}\right)^2, & \text{если } h \text{ нечетно}, \\ 0, & \text{если } h \text{ четно}. \end{cases}$$

Теперь вычислим для нашей выборки $x(1) = 34.73$, $x(2) = 35.97$, $x(3) = 38.66$, $x(4) = 48.14$, $x(5) = 49.67$, $x(6) = 49.72$, $x(7) = 42.49$, $x(8) = 47.04$, $x(9) = 49.05$, $x(10) = 52.47$ функции ковариаций для $h = 0 \iff i = 1,\ i = 1,2,...,10$ по формуле

$$\gamma(i)=\begin{cases}1, & i=1,\\ \left(\dfrac{2}{\pi i}\right)^2, & \text{если } i \text{ нечетно},\\ 0, & \text{если } i \text{ четно}.\end{cases}$$

В результате имеем $\gamma(1)=1$, $\gamma(2)=0$, $\gamma(3)=0.0450$, $\gamma(4)=0$. $\gamma(5)=0.0162$, $\gamma(6)=0$, $\gamma(7)=0.0083$, $\gamma(8)=0$, $\gamma(9)=0.0050$, $\gamma(10)=0$. Далее, составим матрицу σ

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0.0450 & 0 & 0.0162 & 0 & 0.0083 & 0 & 0.0050 & 0\\ 0 & 1 & 0.0450 & 0 & 0.0162 & 0 & 0.0083 & 0 & 0.0050 & 0\\ 0.0450 & 0 & 1 & 0 & 0.0162 & 0 & 0.0083 & 0 & 0.0050 & 0\\ 0 & 0.0450 & 0 & 1 & 0.0162 & 0 & 0.0083 & 0 & 0.0050 & 0\\ 0.0162 & 0 & 0.0450 & 0 & 1 & 0 & 0.0083 & 0 & 0.0050 & 0\\ 0 & 0.0162 & 0 & 0.0450 & 0 & 1 & 0.0083 & 0 & 0.0050 & 0\\ 0.0083 & 0 & 0.0162 & 0 & 0.0450 & 0 & 1 & 0 & 0.0050 & 0\\ 0 & 0.0083 & 0 & 0.0162 & 0 & 0.0450 & 0 & 1 & 0.0050 & 0\\ 0.0050 & 0 & 0.0083 & 0 & 0.0162 & 0 & 0.0450 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0.0050 & 0 & 0.0083 & 0 & 0.0162 & 0 & 0.0450 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Вычислим $\bar{a}_{in}$ по формуле $\bar{a}_{in}=\sum_{j=1}^{10}\sigma_{ij}\gamma(j)$,

$$\bar{a}=\begin{bmatrix} 1.00238132999999996\\ 0.00238132999999999966\\ 0.0903563299999999986\\ 0.000356329999999999972\\ 0.0345188899999999966\\ 0.0000938899999999999972\\ 0.0180830000000000019\\ 0.0000250000000000000012\\ 0.0110094399999999988\\ 0. \end{bmatrix}$$

затем по формуле (20) построим предиктор (прогноз) цены на нефть сорта **Brent** на ноябрь (11-й месяц) 2016 года, то есть

$$\bar{x}(11)_n=\sum_{i=1}^{10}\bar{a}_{in}x(i)=41.4374466540999933\approx \mathbf{41.4374}.$$

Замечание. Задачу оценивания $f(\omega)$ по выборке $(x(1),...,x(n))$ считая μ известным, мы не можем решить, и, затем, применить для решения этой практической задачи, так как в нашем случае μ (математическое ожидание) неизвестно.

Все вычисления проводились на **Maple 13**.

Вывод. Не все входные данные (выборка, цены на нефть) (по месяцам) являются стохастическими поэтому прогноз цены на нефть методом линейного прогнозирования стационарных процессов нельзя. Такой прогноз приводит к неверному результату.

Литература

1. *Колмогоров А.Н.* Стационарные последовательности в гильбертовом пространстве // Бюллетень Московского университета. – Москва, 1941. – Т. 2, № 6. – С. 1-40.
2. *Wiener N.* Extrapolation, interpolation and smoothing of stationary time series. – New York: John Wiley, 1949. – 532 p.
3. *Уилкс С.* Математическая статистика. – Москва: Наука, 1967. – 632 с.
4. *Kanat Shakenov.* The Solution of the Inverse Problem of Stochastic Optimal Control // Rev. Bull. Cal. Math. Soc. Calcutta Mathematical Society: Calcutta, 2012. – N 20 (1). – P. 43-50.