Поиск. - 2014. - № 1. - С. 89-94

Гармоникалары гиперболалық крестерде болатын полиномдарға арналған аралас нормадағы теңсіздік

Е.Ж.Айдос

Мақалада спектрлері гиперболалық крестерде жататын полиномдар үшін аралас $L_{\vec{p}}$, $\mathbf{1} < \vec{\boldsymbol{p}} < +\infty$ нормада Бернштейн теңсіздігі дәлелденеді. Бұл теңсіздік Джексон – Никольский теңсіздігін, кері теоремаларды алуда маңызды роль атқарады, оның және басқа да бірқатар пайдалы қолданыстары бар.

В.Н.Темляков [1], полиномдар мен оның туындылары $L_{\boldsymbol{p}}$, $1 < p \leq +\infty$ - кеңістігінің метрикасында өлшенген жағдайда, гармоникалары гиперболалық крестерде болатын полиномдарға арналған Бернштейн теңсіздігін дәлелдеген еді. Біз, В.Н.Темляковтің осы схемасын қолдана отырып, гармоникалары гиперболалық крестерде болатын полиномдар үшін аралас норма бойынша Бернштейн теңсіздігінің инварианттылығын көрсетеміз.

Алдымен қажетті белгілеулер мен керекті тұжырымдарды келтіреміз.

R_d арқылы $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_d)$ нүктелерінен құралған d - өлшемді евклид кеңістігін, ал $\pi_d \equiv \ -\pi, \pi \ ^d$ арқылы d - өлшемді кубты белгілейік. Өлшенетін, әрбір айнымал бойынша 2π -периодты және ($\mathbf{p} = (p_1, p_2, ..., p_d), 1 \leq p_i < \infty,$ $i = 1, 2, ..., d$)

$$\| f \|_{\mathbf{p}} \equiv \left(\int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} \ f \ \ x_1, ..., x_d \ \ ^{p_1} dx_1 \right)^{\frac{p_2}{p_1}} dx_2 ... \right)^{\frac{p_d}{p_{d-1}}} dx_d \right)^{\frac{1}{p_d}} < \infty$$

(егер $p_1 = ... = p_d = p$ болса, онда $\| f \|_{\mathbf{p}} \equiv \| f \|_p = \left(\int_{\pi_d} | f(\mathbf{x}) |^p \, d\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{p}}$**)** шартын қанағаттандыратын $f(\mathbf{x}) = f(x_1, ..., x_d)$ функциясы $L_{\mathbf{p}}(\pi_d)$ кеңістігінде жатады: $f \in L_{\mathbf{p}}(\pi_d)$.

Төмендегі белгілеулерді енгізейік:

$\mathbf{k} = \ k_1, ..., k_d \ $, k_j - бүтін сандар, $\mathbf{s} = \ s_1, ..., s_d \ $, s_j – натурал сандар,

$j = 1, ..., d;$

$$\rho(\mathbf{s}) = \left\{\mathbf{k} = (k_1,\dots,k_d) : 2^{s_j-1} \le k_j < 2^{s_j},\ j = 1,2,\dots,d\right\};$$

$$\delta_{\mathbf{s}}(f,\mathbf{x}) = \sum_{|\mathbf{k}|\in\rho(\mathbf{s})} \hat{f}(\mathbf{k})\, e^{i(\mathbf{k},\mathbf{x})},\ \text{мұнда } |\mathbf{k}| = (|k_1|,\dots,|k_d|);$$

$$\hat{f}(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\pi_d} f(\mathbf{x})\, e^{-i(\mathbf{k},\mathbf{x})}\, d\mathbf{x};$$

$[1;d]$ аралығындағы қандай да бір бүтін сандар жиыны e, ал $j\in e$ үшін $\gamma_j = 1$ және $j\notin e$ үшін $\gamma_j > 1$ шарттарын қанағаттандыратын вектор $\boldsymbol{\gamma} = (\gamma_1,\dots,\gamma_d)$ болсын; $\mathbf{r} = (r_1,\dots,r_d)$ және $r = \min\limits_{i=1,\dots,d} r_i \ge 0.$

Келесі жиынды анықтаймыз: $\Gamma(N,\boldsymbol{\gamma}) = \left\{\mathbf{k} : k_j > 0,\ j = 1,\dots,d,\ \prod\limits_{j=1}^{d} k_j^{\gamma_j} \le N\right\}$ ($|\mathbf{k}|\in\Gamma(N,\boldsymbol{\gamma})$ болатын барлық $\mathbf{k}$ жиынын гиперболалық крест деп атайды);

$T(N,\boldsymbol{\gamma})$ арқылы $\sum\limits_{|\mathbf{k}|\in\Gamma(N,\boldsymbol{\gamma})} a_{\mathbf{k}} e^{i(\mathbf{k},\mathbf{x})}$ түріндегі барлық полиномдар жиынын белгілейміз.

$\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{1}$ $(\mathbf{r} = \mathbf{0})$ болған жағдайларда $\boldsymbol{\gamma}$ $(\mathbf{r})$ векторы мүлдем жазылмайды.

Айталық, $\mathbf{r} = r\,\boldsymbol{\gamma},\ r\ge 0,\ U_N^{\mathbf{r}}(\mathbf{x},\boldsymbol{\alpha}) = 2^d \sum\limits_{K\in\Gamma(N,\boldsymbol{\gamma})} \prod\limits_{j=1}^{d} k_j^{r_j} \cos\left(k_j x_j + \frac{\alpha_j\pi}{2}\right).$

$t(\mathbf{x})\in \mathrm{T}(N,\boldsymbol{\gamma})$ полиномдары үшін $t^{\mathbf{r}}(\mathbf{x},\boldsymbol{\alpha})$ жазуы $t(\mathbf{x})$ полиномының $U_N^{\mathbf{r}}(\mathbf{x},\boldsymbol{\alpha})$ полиномымен үйірткісін (свертка) білдіреді, яғни, $t^{\mathbf{r}}(\mathbf{x},\boldsymbol{\alpha}) = (2\pi)^{-d}\int_{\pi_d} t(\mathbf{x}-\mathbf{y})\, U_N^{\mathbf{r}}(\mathbf{y},\boldsymbol{\alpha})\, d\mathbf{y}$ ($\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0},\ \mathbf{r} = \mathbf{0}$ болса $t^{\mathbf{0}}(\mathbf{x},\mathbf{0}) \equiv t(\mathbf{x})$).

Егер m арқылы $[1;d]$ аралығындағы қандай да бір бүтін сандар жиынын, ал $\tilde{t}(\mathbf{x})$ арқылы $x_j,\ j\in m$ -айнымалдары бойынша $t(\mathbf{x})$ полиномымен түйіндес полиномды белгілесек, онда

$$\tilde{t}_m(\mathbf{x}) = t^{\mathbf{0}}(\mathbf{x},\boldsymbol{\alpha}^m),\ \text{мұнда } \alpha_j^m = \begin{cases} -1, & \text{егер } j\in m,\\ 0, & \text{егер } j\notin m.\end{cases}$$

$C(\alpha,\beta,\dots)$ арқылы тек жақшадағы параметрлерге ғана тәуелді, бірақ әртүрлі формулаларда бөлек-бөлек болатын қандай да бір оң шамаларды белгілейміз. Оң A және кез келген B үшін $B \underset{\alpha,\beta,\ldots}{<<} A$ жазуы $|B| \le C(\alpha,\beta,\ldots)A$ теңсіздігін білдіреді.

Оң A және B үшін $A \underset{\alpha,\beta,\ldots}{\succ\prec} B$ жазуы $A \underset{\alpha,\beta,\ldots}{<<} B \underset{\alpha,\beta,\ldots}{<<} A$. қатыстарын көрсетеді.

Негізгі теореманы дәлелдеуге керекті тұжырымдарды келтірейік.

I Лемма ([2, 238 б.]). Кез келген $f \in L_{\mathbf{p}}(\pi_d)$, $1 < p_i < \infty,\ i = 1,\ldots,d$ функциясы үшін мына қатыстар орындалады: $\|f\|_{\mathbf{p}} \underset{\mathbf{p}}{\succ\prec} \left\| \left\{ \sum_{\mathbf{s}} |\delta_{\mathbf{s}}(f,\mathbf{x})|^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \right\|_{\mathbf{p}}$.

I Лемма - Литтлвуд-Пэли теоремасының аралас норма жағдайындағы жалпыламасы.

I леммадан келесі салдар шығады

Салдар. Айталық $1 < p_i < \infty,\ i = 1,\ldots,d,\ f(x) \in L_{\mathbf{p}}(\pi_d)$ және

$$S_l^{\gamma}(f) = \sum_{(\gamma,\mathbf{s}) \le l+1} \delta_{\mathbf{s}}(f,\mathbf{x})$$ болсын.

Онда $\|S_l^{\gamma}(f)\|_{\mathbf{p}} \underset{\mathbf{p}}{<<} \|f\|_{\mathbf{p}}$ теңсіздігі орындалады.

Шынында да, I лемманы екі рет қолдансақ

$$\|S_l^{\gamma}(f)\|_{\mathbf{p}} = \left\| \sum_{(\gamma,\mathbf{s}) \le l+1} \delta_{\mathbf{s}}(f,\mathbf{x}) \right\|_{\mathbf{p}} \underset{\mathbf{p}}{<<} \left\| \left\{ \sum_{(\gamma,\mathbf{s}) \le l+1} |\delta_{\mathbf{s}}(f,\mathbf{x})|^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \right\|_{\mathbf{p}} \underset{\mathbf{p}}{<<}$$

$$\underset{\mathbf{p}}{<<} \left\| \left\{ \sum_{(\gamma,\mathbf{s}) \le l+1} |\delta_{\mathbf{s}}(f,\mathbf{x})|^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \right\|_{\mathbf{p}} \underset{\mathbf{p}}{<<} \|f\|_{\mathbf{p}}$$ аламыз.

2 Лемма (Марцинкевич теоремасы [2, 239 б.]). Егер еселі $\lambda_{\mathbf{k}} \equiv \lambda_{k_1,\ldots,k_d}$ тізбектері үшін $s_i,\ i = 1,\ldots,d$ сандарына тәуелді емес және

$\sum_{|k_1|=2^{s_1-1}}^{2^{s_d}-1} \ldots \sum_{|k_d|=2^{s_d-1}}^{2^{s_d}-1} |\Delta_1 \ldots \Delta_d \lambda_{k_1,\ldots,k_d}| \le M,\quad s_i = 1,2,\ldots,\quad i = 1,\ldots,d$ (мұнда $\Delta_j \tau_{k_1,\ldots,k_d} =$ $= \tau_{k_1,\ldots,k_{j+1},\ldots,k_d} - \tau_{k_1,\ldots,k_j,\ldots,k_d}$**)** теңсіздігі орындалатын M саны бар болса, онда кез келген $f(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}} e^{i(\mathbf{k},\mathbf{x})} \in L_{\mathbf{p}}(\pi_d)$, $1 < p_i < \infty,\ i = 1,\dots,d$ функциясы үшін $\Lambda f = \sum_{\mathbf{k}} \lambda_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}} e^{i(\mathbf{k},\mathbf{x})} \in L_{\mathbf{p}}(\pi_d)$, сонымен бірге келесі теңсіздік орындалады

$$\|\Lambda f\|_{\mathbf{p}} \underset{\mathbf{p},M}{<<} \|f\|_{\mathbf{p}}. \tag{1}$$

Теорема. Айталық $\mathbf{p} = (p_1,\dots,p_d)$, $1 < p_i < \infty,\ i = 1,\dots,d;$ $\mathbf{r} = (r_1,\dots,r_d)$, $0 < r_i < \infty,\ i = 1,\dots,d;$ $\mathbf{r} = r\,\boldsymbol{\gamma},$ (мұнда $r = \min\limits_{i=1,\dots,d} r_i$) болсын. Онда кез келген $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1,\dots,\alpha_d)$ үшін келесі теңсіздік орындалады

$$\sup_{t\in T(N,\boldsymbol{\gamma})} \frac{\left\|t^{(r\gamma)}(\mathbf{x},\boldsymbol{\alpha})\right\|_{\mathbf{p}}}{\left\|t(\mathbf{x})\right\|_{\mathbf{p}}} \underset{\mathbf{p},M}{<<} N^r. \tag{*}$$

Дәлелдеуі. $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$ жағдайын қарастырамыз, өйткені, $1 < p_i < \infty,\ \ i = 1,\dots,d$ үшін түйіндес функциялар туралы Рисс теоремасының көп өлшемді аналогы бойынша, $L_{\mathbf{p}}(\pi_d)$ кеңістігінен $L_{\mathbf{p}}(\pi_d)$ кеңістігіне бейнелейтін тригонометриялық түйіндестік операторы шенелген оператор болады ([2, 241б.]). Онда тригонометриялық жүйелердің ортогональдығына және $t^{(\mathbf{r})}(\mathbf{x},\boldsymbol{\alpha})$ туынды анықтамасына сүйеніп келесі теңдіктерді алуға болады

$$t^{(r\gamma)}(\mathbf{x},\mathbf{0}) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\pi_d} t(\mathbf{x}-\mathbf{y})\, U^{(r\gamma)}(\mathbf{y},\mathbf{0})\, d\mathbf{y} =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\pi_d} \sum_{|\mathbf{k}|\in\Gamma(N,\boldsymbol{\gamma})} \hat{t}(\mathbf{k})\, e^{i(\mathbf{k},\mathbf{x}-\mathbf{y})} \left(2^d \sum_{\mathbf{k}\in\Gamma(N,\boldsymbol{\gamma})} \prod_{j=1}^{d} k_j^{r\gamma_j} \cos(k_j y_j)\right) d\mathbf{y} =$$

$$= \sum_{|\mathbf{k}|\in\Gamma(N,\boldsymbol{\gamma})} \hat{t}(\mathbf{k}) \prod_{j=1}^{d} \left|k_j^{r\gamma_j}\right| e^{i(\mathbf{k},\mathbf{x})}. \tag{2}$$

Біреселі $\lambda_{k_i}^{r\gamma_i} \equiv |k_i|^{r\gamma_i}\, 2^{-r\gamma_i s_i}$ және $\left(\lambda_{k_i}^{r\gamma_i}\right)^{-1} \equiv |k_i|^{-r\gamma_i}\, 2^{r\gamma_i s_i}$, $2^{s_i-1} \le |k_i| < 2^{s_i}$, $s_i = 1,2,\dots,\ i = 1,\dots,d$ тізбектері Марцинкевич көбейткіштері бола алады, яғни, қандай да бір M_i саны үшін келесі қатыстар орындалады: $\left|\lambda_{k_i}^{r\gamma_i}\right| \le M_i$, $\sum\limits_{|k_i|=2^{s_i-1}}^{2^{s_i}-1} \left|\lambda_{k_i}^{r\gamma_i} - \lambda_{k_i+1}^{r\gamma_i}\right| \le M_i,\ \ s_i = 1,2,\dots,$ міне сондықтан

$\lambda_{k_1,\dots,k_d} \equiv \prod\limits_{i=1}^{d} \lambda_{k_i}^{r\gamma_i}$ еселі тізбегі үшін $\sum\limits_{|k_1|=2^{s_1-1}}^{2^{s_1}-1} \dots \sum\limits_{|k_d|=2^{s_d-1}}^{2^{s_d}-1} \left|\Delta_1 \dots \Delta_d \lambda_{k_1,\dots,k_d}\right| \le M,$

$s_i = 1,2,\ldots,\quad i=1,\ldots,d,$ теңсіздігі орындалады (мұнда $\Delta_1\ldots\Delta_d\lambda_{k_1,\ldots,k_d} = \prod_{i=1}^{d}\left(\lambda_{k_i+1}^{r\gamma_i} - \lambda_{k_i}^{r\gamma_i}\right)$).

Ендеше, 2 лемма бойынша, $\Lambda f \sim \sum_{\mathbf k}\prod_{j=1}^{d}\lambda_{k_j}^{r\gamma_j}\hat f(\mathbf k)\, e^{i(\mathbf k,\mathbf x)} \in L_{\mathbf p}(\pi_d)$ және $\|\Lambda f\|_{\mathbf p} \underset{\mathbf p,M}{<<} \|f\|_{\mathbf p}$.

Осы сияқты, $\Lambda^{-1} f \sim \sum_{\mathbf k}\prod_{j=1}^{d}\left(\lambda_{k_j}^{r\gamma_j}\right)^{-1}\hat f(\mathbf k)\, e^{i(\mathbf k,\mathbf x)} \in L_{\mathbf p}(\pi_d)$ және $\|\Lambda^{-1} f\|_{\mathbf p} \underset{\mathbf p,M}{<<} \|f\|_{\mathbf p}$ аламыз. Сондықтан, (1) теңсіздікті ескеріп

$$\|f\|_{\mathbf p} = \left\|\sum_{\mathbf k}\hat f(\mathbf k)\, e^{i(\mathbf k,\mathbf x)}\right\|_{\mathbf p} = \left\|\sum_{\mathbf k}\prod_{j=1}^{d}\lambda_{k_j}^{r\gamma_j}\prod_{j=1}^{d}\left(\lambda_{k_j}^{r\gamma_j}\right)^{-1}\hat f(\mathbf k)\, e^{i(\mathbf k,\mathbf x)}\right\|_{\mathbf p} \underset{\mathbf p,M}{<<}$$

$$\underset{\mathbf p,M}{<<} \left\|\sum_{\mathbf k}\prod_{j=1}^{d}\left(\lambda_{k_j}^{r\gamma_j}\right)^{-1}\hat f(\mathbf k)\, e^{i(\mathbf k,\mathbf x)}\right\|_{\mathbf p} \equiv \left\|\Lambda^{-1} f\right\|_{\mathbf p} \qquad (3)$$

аламыз.

Айталық, $t(\mathbf x) \equiv t(\mathbf x,\mathbf 0) \in T(N,\boldsymbol\gamma)$. Онда, I лемма бойынша, мына қатыстар орындалады

$$\|t(\mathbf x,\mathbf 0)\|_{\mathbf p} \underset{\mathbf p}{\asymp} \left\|\left(\sum_{\mathbf s}\left|\delta_{\mathbf s}(\mathbf t,\mathbf x)\right|^2\right)^{\frac12}\right\|_{\mathbf p}, \qquad (4)$$

және (2), (3) пен (4) қатыстар бойынша

$$\left\|t^{(r\gamma)}(\mathbf x,\mathbf o)\right\|_{\mathbf p} = \left\|\sum_{|\mathbf k|\in\Gamma(N,\boldsymbol\gamma)}\hat t(\mathbf k)\prod_{j=1}^{d}|k_j|^{r\gamma_j} e^{i(\mathbf k,\mathbf x)}\right\|_{\mathbf p} \underset{\mathbf p,M}{<<} \left\|\sum_{|\mathbf k|\in\Gamma(N,\boldsymbol\gamma)}\hat t(\mathbf k)\prod_{j=1}^{d}\left(\lambda_{k_i}^{r\gamma_i}\right)^{-1}\prod_{j=1}^{d}|k_j|^{r\gamma_j} e^{i(\mathbf k,\mathbf x)}\right\|_{\mathbf p} \underset{\mathbf p,M}{<<}$$

$$\underset{\mathbf p,M}{<<} \left\|\left(\sum_{\mathbf s}\left|\sum_{|k_1|=2^{s_1-1}}^{2^{s_1}-1}\ldots\sum_{|k_1|=2^{s_d-1}}^{2^{s_1}-1}\hat t(\mathbf k)\prod_{j=1}^{d}|k_j|^{r\gamma_j}\prod_{i=1}^{d}|k_i|^{-r\gamma_i}\, 2^{r\gamma_i s_s} e^{i(\mathbf k,\mathbf x)}\right|^2\right)^{\frac12}\right\|_{\mathbf p} \underset{\mathbf p,M}{<<}$$

$$\underset{\mathbf p,M}{<<} \left\|\left(\sum_{\mathbf s}2^{2r(\boldsymbol\gamma,\mathbf s)}\left|\sum_{|k_1|=2^{s_1-1}}^{2^{s_1}-1}\ldots\sum_{|k_d|=2^{s_d-1}}^{2^{s_d-1}}\hat t(\mathbf k)\, e^{i(\mathbf k,\mathbf x)}\right|^2\right)^{\frac12}\right\|_{\mathbf p} \underset{\mathbf p,M}{<<} N^r\left\|\left(\sum_{\mathbf s}\left|\delta_{\mathbf s}(\mathbf t,\mathbf x)\right|^2\right)^{\frac12}\right\|_{\mathbf p} \underset{\mathbf p,M}{<<} N^r\|t\|_{\mathbf p}$$

аламыз.

Теорема дәлелденді.

Егер $p_1 = ... = p_d = p$, яғни, $\| f \|_{\mathbf{p}} \equiv \| f \|_p = \left(\int\limits_{\pi_d} | f(\mathbf{x})|^p \, d\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{p}}$, $1 < p < \infty$, деп алсақ, онда теоремадағы (*) теңсіздігі В.Н.Темляковтің [1] дәлелдеген теңсіздігімен бірдей болатынын көреміз.

Әдебиет

1. Темляков В.Н. Приближение функций с ограниченой смешанной производной // Труды МИАН СССР. – 1986. –т.178 - с.3-112.
2. Бесов О.В., Ильин В.П., Никольский С.М. Интегральные представления функций и теоремы вложения. – М.: Наука, 1975. – 480 с.