

ЖОК 531.231

Б. Дуаметұлы, С.Қ. Құсайынов, С.К. Нысанбаева

ҚАТТЫ ДЕНЕЛЕРДІҢ АЙНАЛУ ӨСІНЕ ҚАТЫСТЫ ИНЕРЦИЯ МОМЕНТІН ЕСЕПТЕУДІҢ ЖОЛДАРЫ

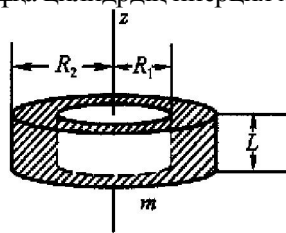
Бұл жұмыста пішіні онша ұқсамаған бір текті қатты денелердің айналу өсіне қатысты біреуінің инерция моменті арқылы басқа пішіндегі денелердің инерция моментін есептеп шығарудың жолдары қарастырылады. Қолдану барысында инерция моментін есептеудің тек біреуі ғана өрнегін еске сақтау жеткілікті.

Айналу өсіне қатысты қатты денелердің инерция моменті механикадағы маңызды физикалық шамалардың бірі болып табылады. Берілген дененің инерция моменті деп күш моментінің оның туғызатын бұрыштық үдеуге қатынасы $I = M/\varepsilon$ айтылады. Инерция моменті дененің айналмалы қозғалысқа қарасты инерттілік өлшемі болып табылады. Қатты дененің z айналу өсіне қатысты инерция моментін негізінен былайша $I_z = \sum m_i R_i^2 = \int R^2 dm$ өрнектеуге болады. Бұдан дененің инерция моменті оның массасы мен бірілген өске қатысты массаның таралуына байланысты екендігі белгілі. Бұл интегралды есептеп шығару өте қиынға соғады. Алайда өрнекті пайдаланып біртекті, айналу өсіне қарасты симметриялы пішінді қатты денелердің инерция моменттерін оңайырақ есептеп шығаруға болады. Пішіні симметриялы емес, сондай-ақ, біртекті емес қатты денелердің инерция моменттері тәжірибе түрінде анықталады. Ал күрделі қоспалы денелердің инерция моменттері өс бойымен айналдырғандағы жеке бөлшектердің инерция моменттерінің суммасына тең болады. Пішіні бір-біріне ұқсамаған қатты денелердің инерция моментін есептеудің өрнектері әр түрлі болғандықтан, олардың бәрін жаттап алып, есте сақтау қиынға соғады. Егер де пішіні жағынан қатты денелер өзара байланысты болса, онда инерция моментін есептейтін өрнектердің де өзара байланысы болуы әбден мүмкін. Бұлай болғанда біз тек қана бір пішіндегі қатты дененің инерция моментінің өрнегін қолдану арқылы басқа пішіндегі қатты дененің инерция моментін есептеудің өрнегін келтіріп шығара аламыз.

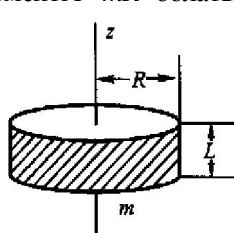
Бұл еңбекте екі түрлі пішіндегі қатты дененің инерция моментін есептеу өрнегі арқылы басқа пішіндегі қатты дененің инерция моментін есептеу әдістері баяндалады.

1. Іші қуыс цилиндрдің z айналу өсіне қатысты инерция моменті өрнегін басқа пішіндегі дененің инерция моментін есептеуде қолдану

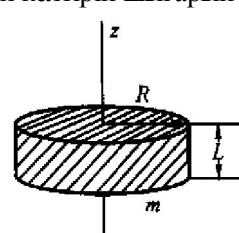
1-суретте көрсетілгендей, іші қуыс цилиндрдің z айналу өсіне қатысты инерция моментінің өрнегі $I = m(R_1^2 + R_2^2)/2$ екендігі бәрімізге белгілі. Егер $R_1=R_2$ болса, онда, 2-суретте көрсетілгендей, іші қуыс жұқа цилиндрдің инерция моменті $I=mR^2$ болатынын келтіріп шығарып алуға болады.



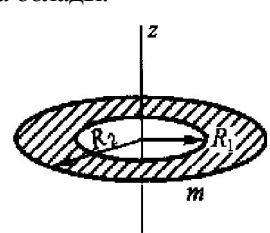
1-сурет



2-сурет

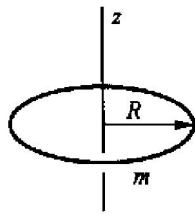


3-сурет

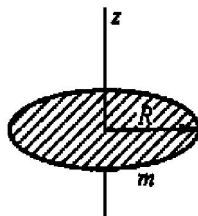


4-сурет

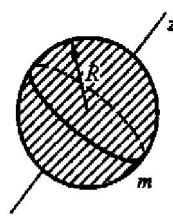
Ал енді $R_1=0$ болған кезде, 3-суретте көрсетілгендей, іші бүтін тұтас цилиндрдің инерция моменті $I=mR^2/2$ болатынына көз жеткізу қиын емес. Жоғарыдағы үш түрлі жағдайда цилиндрдің инерция моменті цилиндр қалыңдығы L -мен байланысты емес. Сондықтан бұл өрнектен, 4-суретте көрсетілгендей, іші қуыс жұқа дискінің инерция моменті $I = m(R_1^2 + R_2^2)/2$ және 5-суретте көрсетілгендей, жұқа сақинаның инерция моменті $I=mR^2$, содай-ақ, 6-суретте көрсетілгендей, жұқа дискінің инерция моменті $I=mR^2/2$ болатындығын көруге болады.



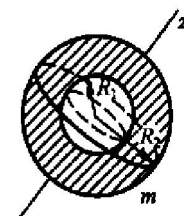
5-сурет



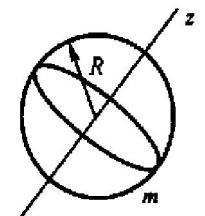
6-сурет



7-сурет



8-сурет



9-сурет

Жоғарыда көрсетілген іші бүтін тұтас цилиндрдің инерция моментінің өрнегі $I = mR^2/2$ арқылы іші бүтін тұтас шардың инерция моментін есептеу өрнегін келтіріп шығаруға болады. 7-суретте көрсетілгендей, іші бүтін тұтас шардың z айналу өсіне перпендикуляр бағытта шар шетінен ℓ қашықтықта радиусы r , қалыңдығы $d\ell$, массасы dm болатын жұқа дискіні кесіп алайық. Геометриялық байланыс өрнектері арқылы $r^2 = R^2 - (R - \ell)^2 = 2R\ell - \ell^2$, $dV = \pi r^2 d\ell$, $m = (4\rho\pi R^3)/3$ екендігін білуге болады. Енді іші бүтін тұтас шардың инерция моментін есептеп көрейік:

$$I = \left(\int r^2 dm \right) / 2 = \left(\rho\pi \int_0^{2R} r^4 d\ell \right) / 2 = \rho\pi \int_0^{2R} (2R\ell - \ell^2)^2 d\ell / 2 = (8\rho\pi R^5) / 15 = 2mR^2 / 5$$

Жоғарыда келтіріп шығарылған іші бүтін тұтас шардың инерция моментінің өрнегі $I = 2mR^2 / 5$ арқылы іші қуыс шардың (8-сурет) инерция моментін келтіріп шығарайық. Іші қуыс шардың ішкі радиусы R_1 , ал сыртқы радиусы R_2 болсын. Тығыздығы бірдей болған жағдайда радиусы R_1 болған іші бүтін тұтас шардың массасы m_1 және R_2 болған іші бүтін шардың массасы m_2 болады десек, онда,

$$m_2 / m_1 = (R_2 / R_1)^3 \quad (1)$$

$$m_2 - m_1 = m \quad (2)$$

$m_2 = m_2 R_2^3 / (R_2^3 - R_1^3)$, $m_1 = m R_1^3 / (R_2^3 - R_1^3)$ болады. Енді инерция моментін есептеп шығарамыз.

$$I = \frac{2}{5} m_2 R_2^2 - \frac{2}{5} m_1 R_1^2 = 2m (R_2^5 - R_1^5) / 5 (R_2^3 - R_1^3) = 2m (R_2^4 + R_2^3 R_1 + R_2^2 R_1^2 + R_2 R_1^3 + R_1^4) / 5 (R_2^2 + R_2 R_1 + R_1^2) \quad (3)$$

Егер жоғарыдағы (3)-ші өрнекте $R_1 = R_2$ болса, онда, 9-суретте көрсетілгендей, іші қуыс шардың инерция моментін $I = 2mR^2/3$ оңай келтіріп шығаруға болады. $R_1 = 0$ болған кезде, керісінше, іші бүтін тұтас шардың инерция моменті $I = 2mR^2/5$ келіп шығады.

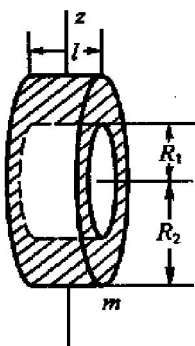
2. Іші қуыс цилиндрдің (10-суретте көрсетілгендей) z айналу өсіне қатысты инерция моменті өрнегін басқа пішіндегі денелердің инерция моментін есептеуге қолдану

Айналу өсі цилиндрдің радиус-вектор бағытында болған кезде іші қуыс цилиндрдің инерция моменті

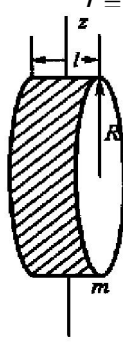
$$I = \frac{m(R_1^2 + R_2^2)}{4} + \frac{m\ell^2}{12} \quad (4)$$

екендігі белгілі. Егер 11-суретте көрсетілгендей, $R_1 = R_2$ болса, онда іші қуыс жұқа цилиндрдің инерция моменті

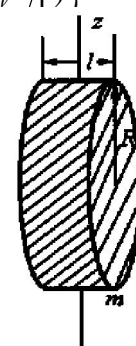
$$I = (mR^2/2) + (m\ell^2/12) \quad (5)$$



10-сурет



11-сурет



12-сурет



13-сурет

келіп шығады. Ал енді $R_1=0$ болған кезде 12-суретте көрсетілгендей, іші бүтін тұтас цилиндрдің инерция моменті

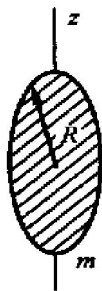
$$I = (mR^2/4) + (m\ell^2/12) \quad (6)$$

болатынын түсіну қиын емес. Егер 13-суретте көрсетілгендей, қалыңдығы $\ell = 0$ болса, онда (4), (5), (6) өрнектері арқылы іші қуыс жұқа дискінің инерция моменті $I = m(R_1^2 + R_2^2)/4$, 14-суретте көрсетілгендей, сақинаның инерция моменті $I = mR^2/2$, және 15-суретте көрсетілгендей, жұқа дискінің инерция моменті $I = mR^2/4$ болатынын келтіріп шығаруға болады. Ал енді $R_1=0$ болған кезде, (6) өрнек арқылы стерженнің z айналу өсі бойынша (16-сурет) инерция моментін $I = m\ell^2/12$ келтіріп шығаруға болады. Енді 17-суретте көрсетілгендей, айналу өсі стерженнің бір шетінде болған кездегі стерженнің инерция моментін есептеп көрейік. 17-суретте көрсетілгендей, стерженнің ұзындығы ℓ , массасы m , инерция моменті I болсын. Егер осы стержень дәл осындай ℓ ұзындықтағы екі стерженнің бір түзу сызық бойымен қосылуынан пайда болады десек, онда 16-суреттегі жағдаймен ұқсас болады да, оның инерция моменті $I_1 = 2I = (2m) \cdot (\ell)^2/12$ келіп шығады. Бұдан 17-суреттегі стерженнің инерция моментін $I = m\ell^2/3$ келтіріп шығаруға болады.

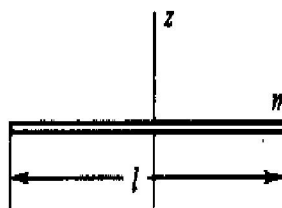
Дәл осы әдіспен іші бүтін цилиндрдің инерция моментінің өрнегі арқылы іші қуыс цилиндрдің және жұқа цилиндрдің инерция моментін келтіріп шығаруға, немесе, керісінше, жұқа цилиндрдің инерция моменті арқылы іші бүтін және іші қуыс цилиндрдің инерция моментін келтіріп шығаруға болады. Сол сияқты іші қуыс цилиндрдің инерция моменті арқылы іші қуыс шардың немесе іші бүтін тұтас шардың инерция моментін келтіріп шығаруға болады.



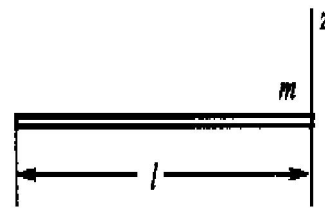
14-сурет



15-сурет



16-сурет



17-сурет

Жоғарыдағы әдістерді қортындылай келе қатты денелердің инерция моментінің өрнегі арасындағы байланыс олардың пішінімен тікелей қатысты екендігін білуімізге болады. Бір пішіндегі қатты дененің айналу өсіне қатысты инерция моментінің өрнегін білетін болсақ, ол арқылы басқа пішіндегі денелердің инерция моментінің өрнегін келтіріп шығаруға болады.

ӘДЕБИЕТТЕР

1. Савельев. И.В., Курс общей физики: в 5-и книгах: 1.Механика : Учебное пособие для втузов – М. : АСТ:Астрель, 2005.
2. Қойшыбаев Н., Шарықбаев. А. О., Физика I том. –Алматы: Кітап, 2001.
3. Абдулаев Ж., Физика курсы. –Алматы: Мектеп, 1994.

4. Шоқанов Ә. Қ., Құрманұлы О., Физика. Механика. Теория, есептер, есеп шығару тәсілдері. –Алматы: ҚазҰТУ, 1998.
5. Майлина Х. Р., Кинематика есептерін шешу әдістері. Әдістемелік нұсқау. –Алматы: ҚазҰТУ, 2001.
6. Жұбанов М., Физиканың негізгі заңдары. –Алматы: Мектеп, 1989.
7. Дуаметұлы Б., Жалпы физика курсының негізгі бақылау сұрақтары мен жауаптары. –Алматы: ҚазҰТУ, 2009.
8. Дуаметұлы Б., Құсайынов С.Қ., Механикалық күштердің байланысы. Қазақстан мектебі, №7, 2009, б.35-37.

Резюме

Предложена методика, позволяющая вычислять момент инерции твердого тела относительно оси вращения путем применения выражения момента инерции тел произвольной формы. Для этого достаточно знать лишь несколько выражений момента инерции тел.

Summary

Because of the relations in their shapes, there is a relationship between the rotational inertias of common uniform rigid bodies. They can be deduced from each other. While using the rotational inertias, we only have to memorize a few, and deduce the others from them.

Ключевые слова: rotational inertia; uniform rigid body; axis

Қ.И. Сәтбаев атындағы ҚазҰТУ

Поступила 2.04.2010 г.